26.04.

1.14. Vektör ve Matris İşlemleri :

1.14.1. Vektörlerin ve Matrislerin Fonksiyonlarının Türetilmesi

$u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vektörünün içinde yer alan değişkenlerin bir fonksiyonu olsun. $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$, ..., $\partial u/\partial x_p$ de kısmi türevleri olsun. O hâlde;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

$u = a'x$ ve $u = x'Ax$ belirli fonksiyonlarının türevleri aşağıdaki iki teorem de verilmiştir.

Teorem 1.14a:

$a' = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ sabitler vektörü iken $u = a'x = x'a$ olsun. Sonrasında şu eşitlik geçerlidir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (a'x)}{\partial x} = \frac{\partial (x'a)}{\partial x} = a$$

Yani;

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_p x_p)}{\partial x_i} = a_i$$

Böylece;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = a$$

Teorem 1.14b

A sabitlerin simetrik matrisi iken $u = x'Ax$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (x'Ax)}{\partial x} = 2Ax.$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

3×3 'lük bir matris yardımı ile teoremin doğruluğunu gösterelim.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}$$

olduğunu varsayalım.

$$x'Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_1' + x_2 a_2' + x_3 a_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x'Ax = x_1^2 a_1' + x_2^2 a_2' + x_3^2 a_3'$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_1} = 2 x_1 a_1'$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_2} = 2 x_2 a_2'$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x_3} = 2 x_3 a_3'$$

$$\frac{\partial (x'Ax)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial (x'Ax)}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial (x'Ax)}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial (x'Ax)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_1' x_1 \\ a_2' x_2 \\ a_3' x_3 \end{bmatrix} = 2 . A . x$$

bulunur.

$u = f(X)$, $p \times p$ 'lik X matrisi içindeki $x_{11}, x_{22}, \ldots,$ x_{pp} değişkenlerinin bir fonksiyonu olsun. $\partial u / \partial x_{11}$, $\partial u / \partial x_{22}$, $\ldots$, $\partial u / \partial x_{pp}$ kısmi türevleri olsun. Yani;

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_{1p}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial u}{\partial x_{p1}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_{pp}} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

BÖLÜM 2 : Rastgele Vektörler ve Matrisler

Rastgele bir vektör veya matrisin elemanları, rastgele değişkenlerden oluşur.

Deneysel yapılarına bakarak, iki rastgele vektörü ayırt edebiliriz:

1. n tane farklı bireyin veya deneysel birimlerin her birinin ölçüsünü içeren bir vektör olsun. Bu durumda, rastgele seçilen n birimin her birinde aynı değişkenler gözlenirse, n rastgele değişken $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şeklinde gösterilir. Genelde ilişkisiz ve aynı varyansa sahiptirler.
2. Bir birey veya deneysel birimin p tane farklı ölçümünü içeren bir vektör olsun. Genelde ilişkili ve farklı varyanslara sahiptir.

1. tip rastgele vektörü göstermek için; çoklu regresyon modelini düşünelim.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

y_i değerleri gözlemlenebilir ama ε_i'ler gözlemlenebilir değildir ancak β'lar bilindiğinde gözlemlenebilir.

2.1. Ortalamalar, Varyanslar, Kovaryanslar ve Korelasyonlar

$f(y)$, y rastgele değişkeninin yoğunluk fonk. olsun. y'nin ortalaması veya beklenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mu = E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) \cdot dy$$

Bu, kitle ortalamasıdır. Genellikle $u(y)$ fonksiyonu için; eğer $u(y) = y^2$ ise;

$$E[u(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \cdot f(y) \cdot dy$$

şeklindedir.

α sabiti, $u(y)$ ve $v(y)$ fonksiyonları için,

$$E(ay) = \alpha \cdot E(y)$$

$$E[u(y) + v(y)] = E[u(y)] + E[v(y)]$$

y rastgele değişkeninin varyansı;

$$\sigma^2 = Var(y) = E(y-\mu)^2$$

Bu, kitle varyansıdır. Varyansın kare kökü, standart sapma olarak bilinir.

$$\sigma = \sqrt{var(y)} = \sqrt{E(y-\mu)^2}$$

$\sigma^2 = Var(y) = E(y^2) - \mu^2$ olarak da yazılabilir. α bir sabitse,

* $Var(\alpha y) = \alpha^2 Var(y) = \alpha^2\sigma^2$ 'dir.

y rastgele vektöründeki y_i ve y_J değişkenleri için, kovaryansı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

* $\sigma_{iJ} = cov(y_i, y_J) = E\left[(y_i - \mu_i)(y_J - \mu_J)\right]$

Burada, $\mu_i = E(y_i)$ ve $\mu_J = E(y_J)$ olarak gösterilmiştir.

* $\sigma_{iJ} = cov(y_i, y_J) = E(y_i y_J) - \mu_i \mu_J$ 'dir.

* y_i ve y_J rastgele değişkenlerinin marjinal yoğunluk fonksiyonları çarpımı, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna eşitse bu iki değişken bağımsızdır denilebilir.

$$f(y_i, y_J) = f(y_i) \cdot f(y_J)$$

$f_i(y_i)$, marjinal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$f_i(y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_i, y_J) \cdot dy_J$$

* Bağımsızlığın tanımı kullanılarak aşağıdaki özellikler elde edilebilir:

1. $E(y_i, y_J) = E(y_i) \cdot E(y_J)$
2. $\sigma_{iJ} = Cov(y_i, y_J) = 0$

y_i ve y_J birbirinden bağımsız ise geçerlidir.

NOT 2. özelliğin tersi doğru değildir. Yani, $\sigma_{iJ} = 0$ olması bağımsız olmaları anlamına gelmez.